

PROGETTO PGTS
Il principio geometrico alla base delle Teorie di Stringa

La parabola $L(n) = n^2 + n + 1$ come base per il principio geometrico delle teorie di stringa

(origine “triangolare” dei numeri di Lie e di Fibonacci)

Francesco Di Noto, Michele Nardelli

Sommario

In questo lavoro riepilogheremo le principali connessioni tra Teoria dei Numeri (in modo particolare numeri primi, numeri di Lie, numeri di Fibonacci, ecc.), Geometria (parabole, **triangoli**, quadrati, solidi geometrici) e teorie di stringa (numeri di dimensioni coinvolte, ecc.), cercando di individuare il **principio geometrico**, essenzialmente ancora

non compreso bene, che è alla base delle teorie di stringa (e indicato brevemente con **pgts**).

Abstract

In this paper we show some important connections between Number Theory (prime numbers, Lie Numbers, Fibonacci numbers) and String Theory, by a geometric principle based on **parabola** $n^2 + n + 1$ to **obtain** Lie numbers and Fibonacci numbers with its **variant** $n^2 + n \pm c$, (c is a little number: $\pm 1, \pm 2, \pm 3...$).

Introduzione

In questo lavoro riprenderemo le connessioni precedentemente trovate tra teoria dei numeri e teorie di stringa, tramite numeri primi, numeri di Lie, da noi così chiamati perché sono alla base alla base, come piccoli sottomultipli, dei numeri di dimensioni dei cinque gruppi di Lie eccezionali, importanti gruppi di simmetria nelle teorie di stringa.

Tali numeri di Lie sono i numeri di elementi delle geometrie proiettive, e ottenibili dalla parabola particolare

$$L(n) = n^2 + n + 1 \quad (1) \quad (\text{con } n \text{ numero primo o potenza di primo})$$

Oppure, più precisamente ed in maniera equivalente:

$$L(n) = n^2 + n^1 + n^0 \quad (1.2)$$

caso limite ($a = 1, b = 1, c = 1$ della formula generale della parabola:

$$ax^2 + bx + c \quad (2)$$

sostituendo infatti x con n , e ponendo $a = b = c = 1$, si ottiene la (1), per noi, come vedremo in seguito, molto interessante, anche perché una sua leggera variante

$$F = n^2 + n \pm c \quad \text{con } c \text{ molto piccolo}$$

fornisce i numeri di Fibonacci, anche questi connessi alle teorie di stringa (in cui appare spesso $\Phi = 1,618\dots$)

Questo allo scopo di individuare le basi del principio geometrico alla base delle teorie di stringa (che chiameremo brevemente *pgts*), e che comprende il concetto geometrico di parabola, ma anche **triangoli**, quadrati, solidi geometrici con facce triangolari, numeri complessi come quaternioni e specialmente ottonioni (rispettivamente con norme = somme di quattro e otto quadrati), e loro connessioni con le teorie di stringa.

Questo è anche un lavoro di fisica matematica, riguardante lo stretto legame tra fisica e matematica, poiché, come scrive il nostro collaboratore Ing. Rosario Turco nel suo blog matematico

<http://mathbuildingblock.blogspot.com/2009/11/fisica-e-matematica.html> (vedi link sul nostro sito)

“Esiste ed esisterà sempre un forte legame tra Fisica e Matematica. Spesso è un problema di fisica a scatenare ricerche matematiche: ad esempio il “gap di massa” o congettura di Yang e Mills è nato dalla fisica e non si è trovato ancora una matematica adeguata alla risoluzione del problema, attualmente trattato con la Teoria dei gruppi ed in particolare i gruppi di Lie (Rif.1, Rif.2). Altre volte è stata la matematica ad offrire spunti per la creazione di modelli in Fisica: la teoria dei numeri dietro la congettura di Birch e Swinnerton – Dyer (un altro dei sei problemi del millennio rimasti, Rif. 3, N.d.A.A), le forme modulari, la funzione zeta di Riemann, l’ultimo Teorema di Fermat e le curve ellittiche. E su un campo F_p , i numeri p-adici sono diventati strumenti ideali per la teoria delle stringhe e delle brane e la M-teoria. Oppure il caso del legame che trovò G. Veneziano tra la funzione Beta e le interazioni forti nel Modello Standard: la Beta è legata alla funzione Gamma e di conseguenza alla funzione zeta di Riemann”

Un riferimento al suddetto principio geometrico, oggetto di questo lavoro, è reperibile sul libro “Iperspazio” di Mikio Kaku (Macroedizioni) pag.244.

“(Einstein) sarebbe senz’altro felice di constatare che esiste un **principio geometrico** di base che peraltro, sfortunatamente, **ancora non comprendiamo appieno**”

Lo scopo di questo lavoro è proprio di cercare una migliore comprensione di tale principio, partendo dalla (1), caso particolare della (2) e dai numeri di Lie.

I numeri di Lie sono dati dalla suddetta formula $L(n) = n^2 + n + 1$, che ci fornisce il numero di elementi delle geometrie proiettive, per esempio il piano di Fano, e che sono poi alla base dei Gruppi eccezionali di Lie, e, come già accennato, sono molto importanti in Fisica.

La serie di Lie (tale definizione è nostra, per maggiore semplicità e chiarezza) è la seguente:

TABELLA 1 SERIE DI LIE

n	n^2	$+$	n	$+$	1	$=$	$L(n)$	F
rapporto L_n/L_{n-1}		relazione con gruppi di Lie						
0	0		0		1		1	1
1								
1	1		1		1		3	3
3								
2	4		2		1		7 ~ 8	
2,333	7*2 = 14 = G ₂ (7= piano di Fano)							
3	9		3		1		13	13
1,857	13*4 = 52 = F ₄ ; 13*6 = 78 = E ₆							
4	16		4		1		21	21
1,615 ~ $\Phi = 1,618$								
5	25		5		1		31 ~ 34	
1,476								
6	36		6		1		43	
1,387								
7	49		7		1		57 ~ 55	
1,325								
8	64		8		1		73	
1,280 ~ $\sqrt{\Phi} = 1,272$								
9	81		9		1		91 ~ 89	
1,246								
10	100		10		1		111	
1,219								

11	121	11	1	133
1,198	(133=7x 19 = E7 gruppo di Lie)			
12	144	12	1	157
1,180	(156 + 132)/2 = 144)			
13	169	13	1	183
1,165				
...
...				
15	225	15	1	241
240 + 8 = 248 = 31*8 = E8 gruppo di Lie				

(Gruppi di Lie = L(n)* k con k = 2, 4, 6, 19, 8, per L(n) = **7,13, 13, 31**. Infatti abbiamo:

TABELLA 2

Gruppi di Lie Fattori: L(n)*k

<u>G(n)</u>	<u>= L(n)*k</u>
14	= 7*2
52	= 13*4
78	= 13*6
133	= 7*19 = 1*133
248	= 31*8

Analogia con le somme di due numeri consecutivi della serie di Lie con :

TABELLA 3 somme di due numeri consecutivi

<u>Somma di due numeri con sec.</u>	<u>numeri di Lie</u>
1+3 = 4	< 7
3+7=10	< 13
7+13=20	< 21
13+21=34	> 31
21+31=52	< 57
31+43= 74	> 73
43+57 = 100	> 91
57+73=130	> 111
... ..	

come si vede, la somma di due numeri successivi della serie non corrisponde perfettamente al numero successivo, come invece avviene per la serie di Fibonacci.

Analogia con i quadrati di Fibonacci

TABELLA 4

<u>Terne di Lie</u>	<u>N= prodotto esterni</u>	<u>Q = quadrato</u>
<u>centrale</u>	<u>differenza crescente</u>	
1 3 7	1*7 = 7	3 ² = 9
differenza 2		
3 7 13	3*13 =39	7 ² = 49
differenza 10		
7 13 21	21*7 = 147	13 ² = 169
differenza 22		
13 21 31	13*31 = 403	21 ² = 441
differenza 38		

21 31 43
differenza 58

$$21 \cdot 43 = 903$$

$$31^2 = 961$$

...

...

...

...

...

Tali differenze (2, 10, 22, 38, 58) sono molto prossime ad alcuni numeri di Fibonacci : **2, 8, 21, 34, 55** ..., ma anche circa il doppio di numeri di Fibonacci più piccoli: **1, 5, 11 ~ 13, 19 ~ 21, 29 ~ 34** ... (*Notiamo che: $13 - 11 = 2$; $21 - 19 = 2$; $34 - 29 = 5$, etc..., forniscono numeri di Fibonacci. Anche $10 - 8 = 2$; $22 - 21 = 1$, $38 - 34 = 4 = 1 + 3$; $58 - 55 = 3$ forniscono numeri di Fibonacci o somme di essi*)

Nella serie di Fibonacci nota , invece, la differenza è sempre +1 o - 1, e $\pm Q$ nelle serie generalizzate (vedi Nota 1)

Come si nota facilmente, la serie di Fibonacci e la serie di Lie sono inizialmente molto vicine (avendo formule simili, $F = n^2 + n \pm c$ (anche questa è un caso particolare della parabola $y = ax^2 + bx + c$, ma ora con $a = 1$, $b = 1$ e $\pm c =$ numero molto piccolo, per es. 0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$), ed $L(n) = n^2 + n + 1$ con n **primo**, in questo caso **2, 3, 5, 11**, o potenza di primo; i numeri di Lie però possono essere primi (3, 7, 13 , 31, 43, 73 e di forma $6n+1$ se maggiori di 3) o non primi, come 21, 57, 91, 133 ecc., anche questi di forma $6n+1$, come 91 e 133, se non sono multipli di 3, come 21 e 57), ed entrambe sono importanti in alcuni fenomeni naturali e in alcuni settori della fisica moderna , es. Modello Standard e teorie di Stringa), mentre in seguito divergono

sempre più al crescere di n (La serie di Lie contiene in genere numeri minori dei numeri di Fibonacci).

Quindi il loro interesse per i fenomeni naturali connessi alle stringhe si limita ai primi numeri delle serie.

Ma da queste due serie numeriche, connesse strettamente con la formula della **parabola** oltre che con i **triangoli*** e i **quadrati** (peraltro già presenti nella formula della parabola), verrà fuori, molto probabilmente, il principio geometrico **pgts** (un misto di triangoli, connessi alle geometrie proiettive, e di quadrati, presenti nelle formule dei numeri di Lie e di Fibonacci). I numeri di Lie sono connessi ai triangoli: così come il Piano di Fano ha $L(2)=7$ elementi (per n primo $=2$), e la relativa immagine è un triangolo, così anche tutti gli altri numeri di Lie hanno una immagine triangolare, formata da una **base** con un numero **b** pari di punti ($b \sim 2\sqrt{Ln}$) (**int**) (cioè della sola parte intera per es. per 91, $b = 18 = 2*9$, essendo $\sqrt{91}=9,53$, essendo $L(n)$ a circa metà intervallo tra un quadrato e il successivo) , sormontata successivamente da altri numeri pari decrescenti, e infine dal numero 1: vediamo l'esempio per $n = 3$ ed $L(n) = 13 = 3^2+3+1$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

così come per il Piano di Fano avevamo $4+2+1=7$ punti con $b = 4 = (7+1)/2 = 4$, ora invece abbiamo: $6+4+2+1 =$

13, con $6 = 2 \cdot 3$ essendo $\sqrt{13} = 3,60$; abbiamo quindi a che fare anche con la **somma dei successivi numeri pari** a partire da $b = 2\sqrt{L(n)} \text{ (int)}$, e aggiungendo 1 si ha il numero degli elementi $L(n) = n^2 + n + 1$ (parabola particolare per a, b e c uguali ad 1) della relativa geometria proiettiva per ogni n primo o potenza di primo.

Un altro esempio, per $L(5) = 31$; $b = \sqrt{31} \text{ (int)} = 10 = 2 \cdot 5$, essendo $\sqrt{31} = 5,56$, e tale che $10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 1 = 31$; naturalmente, il numero dei numeri pari da sommare è $n = b/2$.

In sintesi, abbiamo, per le **geometrie proiettive**, una **parabola** con n numero primo (i **numeri primi** coinvolti sono 2, 3, 5, 7 e 11), una serie di $2n$ **numeri pari** decrescenti da **b** fino a 2, e il numero 1 finale, un **triangolo numerico** come sopra accennato; potrebbe essere questa, in parte, la base del principio geometrico delle teorie di stringa **pgts** che cerchiamo? Ricordiamo che la **serie di Fibonacci** ha formula simile (al posto dell'1 finale della sua formula parabolica c'è un piccolo numero, $\pm c$, ed entrambe le serie sono inizialmente molto vicine ed entrambe importanti per le **teorie di stringa**: nel primo caso perché connessa ai numeri di Lie 7, 13 e 31, piccoli sottomultipli delle dimensioni dei primi gruppi eccezionali di Lie (gruppi di simmetria), nel secondo caso per il numero aureo 1,618 connesso alle teorie di stringa ma anche alla funzione zeta di Riemann, anche questa connessa alle **teorie di stringa**. I numeri di Fibonacci sono vicini alla sommità dei triangoli numerici di cui sopra, per es. **89** è vicinissimo al numero di Lie **91** (oltre l'1 iniziale, solo il **144** numero di Fibonacci è un quadrato perfetto)

Per quanto riguarda i quadrati, essi sono già presenti nelle parabole particolari riguardanti i numeri di Lie ed i numeri di Fibonacci, nella norma dei numeri complessi, dei quaternioni e degli ottonioni (norma = somma di 2, 4 e 8 quadrati rispettivamente, ed in altre formule di fisica e matematica); circa Fibonacci, abbiamo la formula $\Phi^2 - 1 = 2,618 - 1 = 1,618 =$, che contiene il quadrato di Φ . E con molti quadrati, con la formula simile $F = n^2 - n \pm 1$ si ottengono diversi numeri di Fibonacci ma anche di **Lie**, spesso multipli di numeri di **Lie** (quando non sono primi loro stessi, per es. **3**, **7**, **13**, **31**, **43**, **73**, **157**, **211**), con n fino a 15:

TABELLA 5

n^2	n	1	
1	-	1	$\pm 1 = \mathbf{0}$ e 1 numeri di Fibonacci
4	-	2	$\pm 1 = \mathbf{1}$ e 3 “ “ e 1 e 3 di Lie per n = 0 e 1
9	-	3	$\pm 1 = \mathbf{5}$ e 7 con 5 numero di Fibonacci e 7 numero di Lie per n= 2 primo
16	-	4	$\pm 1 = 11$ e 13 con 13 “ “ e 13 numero di Lie per n = 3 primo , 13 primo
25	-	5	$\pm 1 = 19$ e 21 con 21 “ “ e 21 = numero di Lie per n = 4 non primo (21= 3*7)
36	-	6	$\pm 1 = 29$ e 31 31 = numero di Lie per n = 5 , 31 primo
49	-	7	$\pm 1 = 41$ e 43 43 = numero di Lie per n = 6 non primo, 43 primo
64	-	8	$\pm 1 = \mathbf{55}$ e 57 con 55 numero di Fibonacci e 57 = numero di Lie per n = 7 non primo (57 = 3*19)

81 - 9	$\pm 1 =$	71 e 73	73
= numero di Lie per n = 8 non primo, 73 primo			
100 - 10	$\pm 1 =$	89 e 91	con 89 numero di Fibonacci e 91
numero di Lie per n = 9 non primo ($91=7*13$)			
121 - 11	$\pm 1 =$	109 e 111	
(111 = 3*37)			
144 - 12	$\pm 1 =$	131 e 133	133 =
numero di Lie per n = 11 e $E7 = 7*19 = 133$			
169 - 13	$\pm 1 =$	155 e 157	157
numero di Lie per n = 12 non primo, 157 primo			
196 - 14	$\pm 1 =$	181 e 183	183
numero di Lie per n = 13 , 183 = 3*61 ,			
225 - 15	$\pm 1 =$	209 e 211	211
numero di Lie per n = 14, 211 primo			
...
...			

Anche con tale formula contenente quadrati (geometrie proiettive ma ora con segni $-n$ e ± 1) si ottengono numeri di Fibonacci e numeri di Lie, poiché anche con queste si ottengono numeri a circa metà intervallo “i” tra un quadrato e il precedente, essendo tale intervallo $i = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$, per es. $5^2 + 2*5 + 1 = 36 = 6^2$.

Notiamo anche che tutti i numeri primi di Lie (7,13,43,73,157,211) o i fattori primi (7,13, 19,61) per dei numeri di Lie non primi, sono tutti di forma $6k + 1$, ed anche i numeri di Lie composti non multipli di 3 (per es. 91). Questo perché i numeri di Lie (senza il +1 finale) , cioè la forma n^2+n , dà numeri multipli di 6 (per esempio $2+4 = \mathbf{6}$, $2+4+6 = \mathbf{12}$... 20, **30**, **42**, 56 **72**, **90**, **156**, **210**, oppure di forma $6k+2$, come 20, 110 , 182, ecc.

Aggiungendo +1 a tali numeri (come da formula della parabola specifica per i numeri di Lie), si ottiene nel primo caso la forma $6k + 1$, e $6k+2+1$, come **7, 13, 31, 43, 73, 91, 157, 211** ecc.; nel secondo caso, invece $6k+2+1= 6k+3 = 6(k+1) = 3(6k+1)$, e quindi multipli di 3 , come 21,57, 111, 183 ecc; in pratica dopo ogni due numeri primi (o anche composti) di Lie, troviamo un numero di Lie multiplo di 3:

TABELLA 6

<u>$6k+1$</u>	<u>$(6k+1)$</u>
	$3 = 3*1$
7	
13	
	$21 = 3*7$
31	
43	
	$57 = 3*19$
73	
$91 = 7*13$	
	$111 = 3*37$
$133 = 7*19$	
157	
	$183 = 3*61$
211	
241	
	$273 = 3*91$
...

con tutti i numeri primi e non primi coinvolti (tranne il 3) di forma $6k+1$, e spesso essi stessi numeri di Lie come 3, 7, 91; e se dividiamo i fattori primi diminuiti di 1, per 6, otteniamo i *numeri triangolari*:

$$(7 - 1) / 6 = 1$$

$$(19 - 1) / 6 = 3$$

$$(37 - 1) / 6 = 6$$

$$(61 - 1) / 6 = 10$$

$$(91 - 1) / 6 = 15$$

... ..

I numeri triangolari, com'è noto, sono i numeri della terza diagonale del Triangolo di Tartaglia:

				1			
			1		1		
		1		2		1	
	1		3		3		1
	1	4		6		4	1
1		5	10		10	5	
1	6		15	20		15	6
...

I numeri triangolari della diagonale da destra a sinistra sono legati , com'è noto, alle combinazioni di n elementi a due a due, e quindi alla relativa formula

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (3)$$

Quindi i numeri di Lie multipli di 3 sono connessi ai numeri triangolari del triangolo di Tartaglia, così come i numeri $n^2 + n$ della parabola di Lie (senza il +1 finale) sono connessi alla somma dei primi n numeri pari successivi.

Ma si arriva più velocemente ai numeri triangolari dividendo per due la somma dei primi n numeri pari $n^2 + n$, poiché ciò si può scrivere anche come $n(n-1)$, ed $n(n-1)/2$ è proprio la serie dei numeri triangolari T (numero di combinazioni di n elementi a due a due (ma anche a n-2), e quindi la suddetta diagonale rossa del Triangolo di Tartaglia.

Quindi abbiamo $2T$ connessi alla parabola dei numeri di Lie se vi aggiungiamo 1, e quindi la (1) si può scrivere anche come

$$L(n) = 2T + 1 \quad (4)$$

Quindi abbiamo anche $2T + 1$ per i numeri di Lie, come $2F$ per i numeri di dimensioni coinvolte nella teoria di stringa, e $6F \pm 1$ per i numeri primi naturali connessi con le frequenze di vibrazione delle stringhe (Rif. 4, Rif. 5)

TABELLA 7

Ma anche $2T+1 \sim F$ (vedi anche TABELLA 1):

3	<u>3</u>
7	<u>8</u>
13	<u>13</u>
21	<u>21</u>
31	<u>34</u>
43	44,5 = media tra 34 e 55
57	55
73	72 = media tra 55 e 89
91	89
...	...

il che conferma ancora una volta l'affinità numerica tra numeri di Lie = $2T$, numeri triangolari e numeri di Fibonacci

Ma vediamo ora le connessioni tra queste somme di numeri pari e i solidi geometrici connessi ai Gruppi di Lie eccezionali

Il tetraedro ha 6 spigoli $6 = 2*3 = 2+4 = 2^2 + 2$, e
 $6 + 1 = 7 =$ numero di Lie per $n = 2$

L'ottaedro ha 12 spigoli, e $12 = 3*4 = 2+4+6 = 3*2 + 3$
e $12 + 1 = 13 =$ numero di Lie per $n = 3$

Il dodecaedro ha 30 spigoli, e $30 = 5*6 = 2+4+6+8+10 = 5^2+5$
e $30 + 1 = 31 =$ numero di Lie per $n = 5$

Ma anche l'icosaedro ha 30 spigoli, ed anche 20 facce **triangolari** (solo il dodecaedro ha 12 facce pentagonali),
con 12, 20 e 30 numeri di forma $L(n) - 1 = 2T$

Numeri di spigoli $S = L(n) - 1$ con $n = 2, 3$ e 5 con $2, 3$ e 5 numeri primi; ma **2, 3 e 5** sono anche i numeri di Fibonacci, che moltiplicati per due diventano rispettivamente 4, 6, 10: i numeri delle dimensioni coinvolti nelle teorie di stringa e relativa compattazione: $10 - 6 = 4 =$ dimensioni del nostro universo fisico.

L'altra compattazione riguarda $26-16=10$, anche questi numeri doppi ($D = 2F$) dei numeri di Fibonacci **5, 8 e 13**.
(Vedi Nota 2)

Tutto ciò è connesso, per motivi algebrici e di simmetria, tra gli stessi solidi geometrici ed i Gruppi eccezionali di

Lie, come accennato da Jan Stewart nel suo libro “L’eleganza della verità” (Rif. 6) , pagg. 188 e 189

“...Quindi le algebre (o i gruppi) semplici eccezionali sono solo cinque: oltre la vecchia G_2 , ce n’ erano altre quattro, oggi note come F_4 , E_6 , E_7 ed E_8 . Se ci pensate bene, è una situazione davvero strana. L’esistenza di quelle famiglie infinite, al variare di n , è abbastanza ragionevole, perché sono collegate a vari tipi di proprietà geometriche. Ma i cinque gruppi eccezionali sembrano saltar fuori dal nulla, non offrono rappresentazione geometrica di sorta e hanno dimensioni bizzarre (ma non tanto, essendo multiple di alcuni numeri di Lie, N.d.A.A.) : 14, 52, 78, 133 e 248 (vedi Tabella 2, N.d.A.A.). Cos’hanno di speciale questi numeri? E’ quasi come se volessimo fare un catalogo di tutti i mattoni a nostra disposizione per costruire una casa. L’inizio è sensato:

- parallelepipedi di misura 1, 2, 3,...

- cubi di misura 1, 2, 3, 4,...

- lastre di misura 1, 2, 3, 4, ...

- piramidi di misura 1, 2, 3, 4,...

Ma poi abbiamo:

- un tetraedro di misura 14

- un ottaedro di misura 52 (indicato erroneamente come 56 nel libro, N.d.A.A.)

- tre dodecaedri di misura 78, 133 e 248.

E basta, non c’è altro.

Perché saltano fuori questi mattoni dalle strane forme? A che diavolo servono? (Il numero dei loro spigoli è connesso ai numeri di Lie -1, N.d.A.A., vedi sopra) Sembrava del tutto insensato, tanto che Killing, irritato dai gruppi eccezionali, sperò a lungo che fossero il risultato di un suo errore, emendabile con ricerche più accurate. Rovinavano l’eleganza della dimostrazione, ma sembravano non avere nessuna intenzione di andarsene. Infatti sono rimasti lì, e oggi iniziamo a capire il perché. Sotto molti aspetti i cinque gruppi eccezionali si stanno rivelando più interessanti della quattro famiglie infinite; ad esempio trovano importanti applicazioni nella fisica delle particelle elementari, come vedremo. E sono uniti tra loro da **un principio unificatore ancora non ben compreso** (il nostro **pgts?** N.d.A.A.), che li lega ai quaternioni di Hamilton e ad una loro stravagante generalizzazione, gli ottetti...”

Ulteriori osservazioni sui solidi geometrici di cui sopra:

3 dodecaedri = $30 * 3 = 90$ spigoli , $90 + 1 = 91 =$ numero di Lie per $n = 9$, poiché $9^2+9+1 = 91$, e $91 = 7*13$, entrambi numeri di Lie per $n=2$ ed $n = 3$

Inoltre tetraedro vuol dire 4 facce, e $4 = 1*2^2$, ottaedro vuol dire 8 facce, $8 = 2*2^2$, dodecaedro vuol dire 12 facce, $12 = 3*4 = 3*2^2$; ma anche l'icosaedro, con 20 facce, con $20 = 5*2^2$: insomma tre multipli $f = 1, 2, 3$ e 5 di un **quadrato** di lato 2, con f numeri di Fibonacci anche qui; e anche i quadrati, oltre ai **triangoli**, sono importanti per il nostro **pgts**; per esempio, nei numeri di forma $D = 2F$, sono tutti quadrati (tranne il 6), $+1 : 4 = 2^2$, **10** $= 3^2+1$, **16** $= 4^2$, **26** $= 5^2+1$, con D o $D-1 =$ **quadrati** o prodotti di numeri primi e di Fibonacci 2, 3 e 5, maggiormente coinvolti nelle due **parabole** simili dei numeri di Lie e dei numeri di Fibonacci . Queste hanno in comune i numeri 1,2, 3,e 5, solo da 7 e 8 cominciano a differenziarsi, per avere poi in comune anche **13** e **21**, e in seguito solo piccole differenze: 31 e **34**, 57 e **55**, 91 e **89**, 133 (che è anche dimensione del Gruppo di Lie E_7) e **144**, dopo di che le due parabole si allontanano sempre più e non forniscono più numeri utili alle teorie di stringa. Ma la parte iniziale di entrambe è più che sufficiente allo scopo, con i numeri $n = 2, 3, 5$ primi, come da regola per le **geometrie proiettive**, il **principio geometrico** principale del nostro **pgts**, che connette in vari modi **numeri primi** alle stringhe (funzione zeta, geometrie proiettive e gruppi di Lie, numeri primi naturali, dimensioni

di stringhe $D = 2F$) ma anche con F **numeri di Fibonacci** ed anche primi (**2, 3, 5, 13** tranne che per 8 non primo), e infine ai **triangoli**.

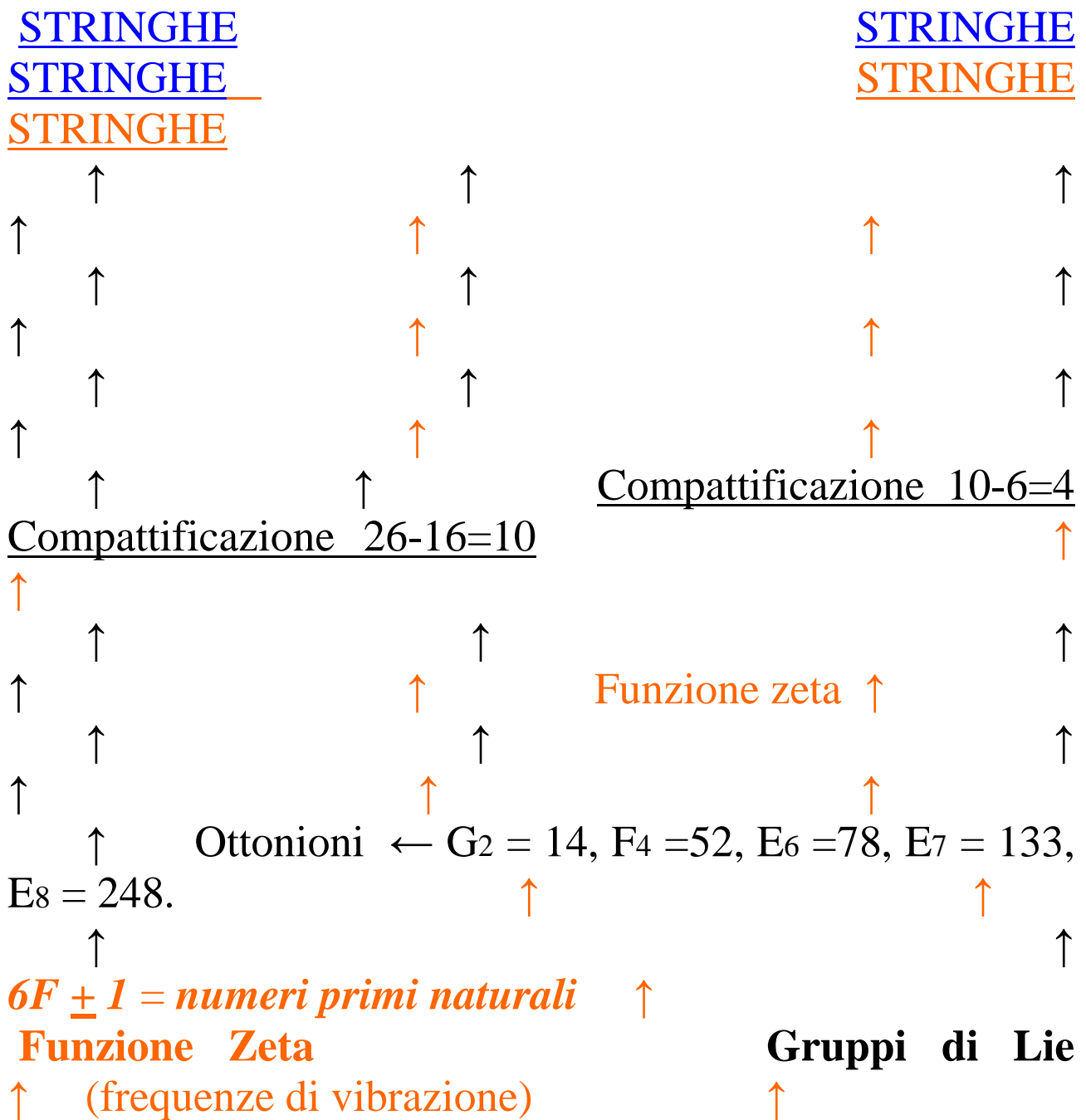
Conclusione

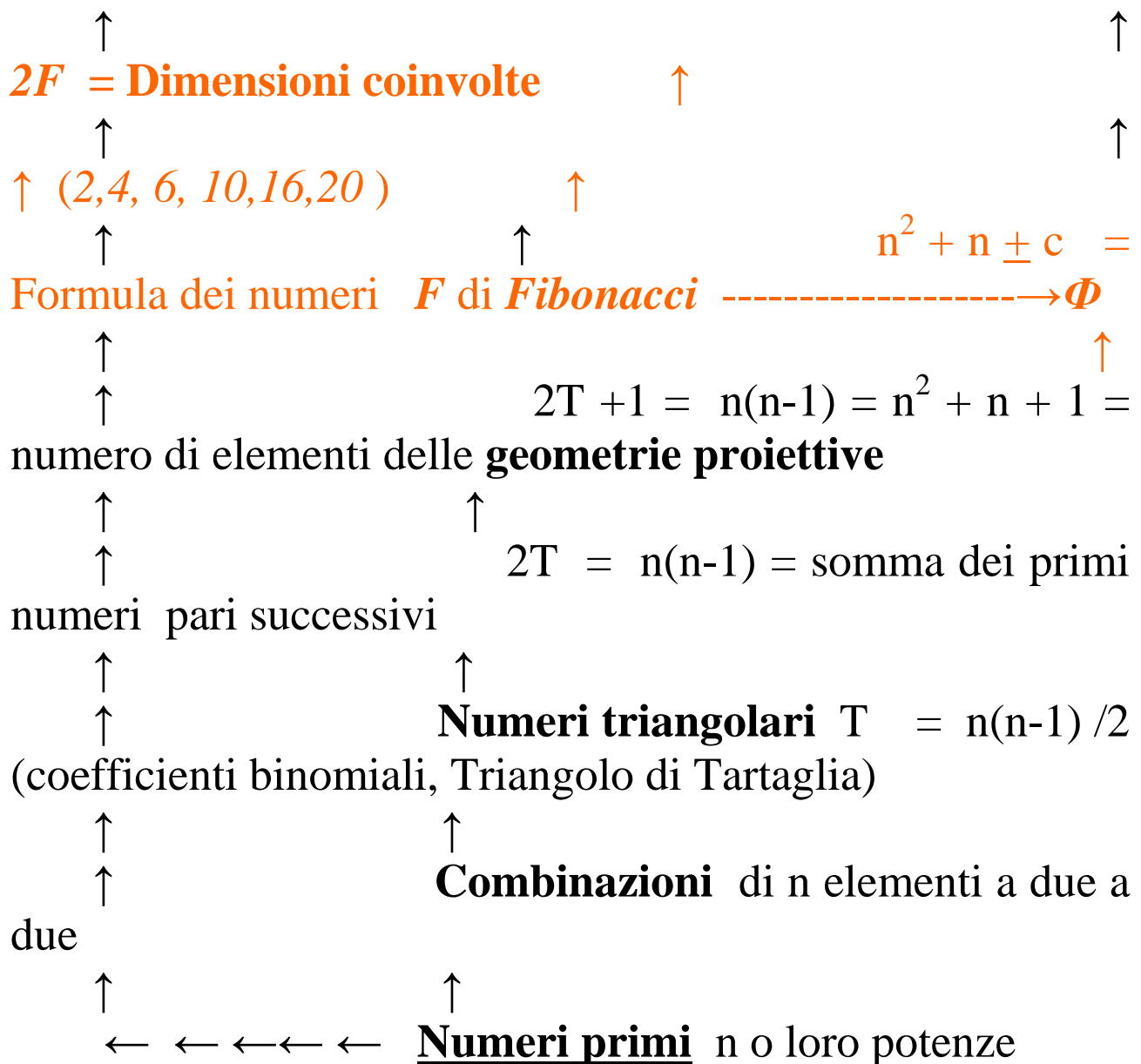
Da quanto è stato descritto sopra, la nostra ricerca sul **pgts** sembra già avviata a soluzione, avendo connesso insieme numeri primi (n), parabole, geometrie proiettive, numeri di Lie e di Fibonacci, **triangoli**, ed infine alcuni solidi geometrici particolari (con facce **triangolari**), connessi ai gruppi di Lie, connessi ai **numeri triangolari T** tramite la formula $L(n) = 2T + 1 = n^2 + n + 1$. Un altro riferimento a tale principio si trova nel libro di Mario Livio “L’equazione impossibile” (BUR) a pagina 289:

“...Ciò nonostante, la supersimmetria è un prodotto della teoria delle stringhe, una conseguenza della sua struttura piuttosto che una causa della sua esistenza. Questo che cosa significa? Molti teorici delle stringhe ritengono si debba ancora scoprire un principio soggiacente più grande, che necessita della teoria delle stringhe. Se la storia si ripeterà, questo **principio** comporterà una simmetria omnicomprensiva ancora più convincente; al momento, però, nessuno ha la minima idea di quale possa essere questo principio (**geometrico**, come pensava Gross? N.d.A.A.)...

Con questo lavoro, ed eventuali successivi miglioramenti, vogliamo cercare e trovare tale principio, iniziando dalle parabole molto simili per le geometrie proiettive (con n numeri primi di base 2, 3, e 5) e per i numeri di Fibonacci, e risalendole come nello schema seguente per arrivare alle stringhe, ed alle relative teorie.

Schema generale del percorso numerico/geometrico del pgts a partire dai numeri primi, fino alle stringhe





Un'ultima nota riguardante i numeri complessi e ipercomplessi (connessi ai gruppi di Lie come gli ottonioni), ed una loro possibile relazione numerica con i gruppi di Lie; infatti essi, fino agli ottonioni, sono possibili se una piccola potenza di $2^n - 1$ è anche un numero di Lie, come da seguente Tabella:

TABELLA 8

2^n	$2^n - 1$	=	numero di Lie	
<u>Numeri</u>				
$2^1 = 2$	2-1	=	1	si
complessi				
$2^2 = 4$	4-1	=	3	si
quaternioni				
$2^3 = 8$	8-1	=	7	si
ottonioni	connessi al Gruppo di Lie $G_2 = 14 = 2 * 7$			
$2^4 = 16$	16-1	=	15	no
sedenioni	(non connessi ai gruppi di Lie)			
$(2^5 = 32$	32-1	=	31	si
32-nioni	connessi al gruppo di Lie $248 = 8 * 31$)			

Si è dimostrato che avanzando nella successione dei numeri complessi, essi perdono successivamente le proprietà algebriche, per cui dai sedenioni in poi essi non appartengono più alla categoria dei numeri, non potendo più formare gruppi algebrici. Ma qualcuno ha mai provato con i 32-nioni? Essendo 31 numero di Lie, essi potrebbero riacquistare qualcuna della proprietà algebriche perdute dai precedenti numeri ipercomplessi, e potrebbero quindi formare un gruppo algebrico, probabilmente connesso a $E_8 = 248$, che permette la ricompattazione di dimensioni $26 - 16 = 10$.

E' una congettura che potrebbe essere facilmente verificata o confutata dagli esperti in numeri ipercomplessi.

Infine, con i numeri triangolari T , si possono formare dei triangoli numerici, tramite righe di punti, la cui somma è T :

Per esempio:

•
• •

tre punti, e 3 è numero triangolare

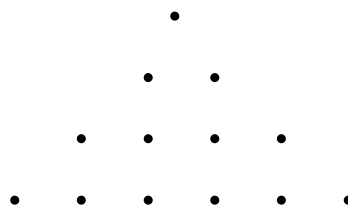
•
• •
• • •

sei punti, e 6 è numero triangolare, e così via.

Mettendo però un numero pari di punti nelle varie righe (tranne il punto iniziale) otterremo triangoli con $2T+1$ punti: la formula di Lie $L(n) = n^2 + n + 1$, dove $n^2 + n$ è anche la somma dei primi n numeri pari, alla quale poi si aggiunge 1

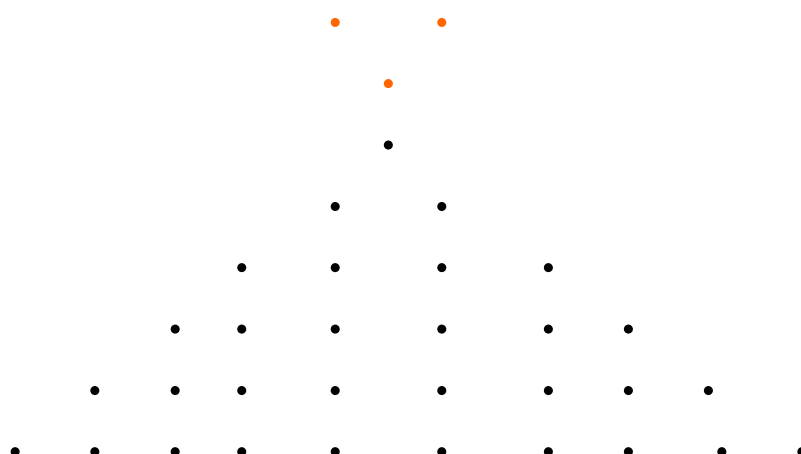
•
• •
• • • •

$2 + 4 + 1 = 7$ punti, vedi per esempio il piano di Fano



$6+4+2+1 = 13$ punti, con 13 numero di Lie per $n = 3$, e con $12 = 2*6$ =somma dei primi 3 numeri pari, e 6 numero triangolare, e così via .

Per i numeri F di Fibonacci, invece, si hanno triangoli simili, ma con piccole differenze al vertice: alcuni punti in più o in meno ($c - 1$, con c il numero della formula $F = n^2 + n \pm c$), per esempio per $F = \mathbf{55} = 57 - 2$, e quindi manca la riga con due punti; $\mathbf{89} = 91 - 2$, e anche qui manca la riga con due punti; mentre per $\mathbf{34}$, al numero di Lie 31 occorre aggiungere 3 punti al vertice, sottoforma di triangolino capovolto (punti in rosso):



con $31 + 3 = \mathbf{34}$ punti , dove 31 è il numero di Lie 5^2+5+1 e 34 è il numero di Fibonacci $5^2 + 5 + 1 + \mathbf{3} = \mathbf{34}$; e così

via per tutti gli altri numeri di Lie e i più vicini numeri di Fibonacci, per esempio $133 + 11 = 144$

Cosicché possiamo ragionevolmente che l'universo fisico si reggerebbe su **triangoli** con $2T+1$ punti per quanto riguarda i numeri di Lie, alcuni piccoli multipli dei quali formano i numeri di elementi dei cinque gruppi eccezionali di Lie, che sono alla base delle simmetrie nel Modello Standard e delle Teorie di stringa; e su **triangoli** simili con F punti (con F numeri di Fibonacci $F = n^2 + n \pm c$ con $c =$ numero piccolo, o anche $F \simeq 2T + 1$, vedi Tabella 7); e i numeri di Fibonacci, com'è noto, appaiono in numerosissimi fenomeni naturali collegabili a frattali, spirali, come per esempio nella disposizione di semi o petali nei fiori, nelle orbite dei pianeti, ecc. e con il numero $\Phi = 1,618$ presente in innumerevoli formule di fisica, comprese anche alcune che riguardano le teorie di stringa. In altre parole, le simmetrie della natura (dominanti nel microcosmo quantistico, tipo particelle e stringhe) lasciano a quest'ultima un "guinzaglio" molto corto (il numero " c ") per permetterle diversi fenomeni a livello macrocosmico, a noi direttamente visibile; ma in genere non oltrepassando mai numeri di Fibonacci oltre **144** (semi di girasoli) o **233** (presente nei numeri di Witten, vicino al Gruppo di Lie $E_8 = 248 = 31 \cdot 8$, con $31 =$ numero di Lie per $n=5$ e 8 numero di Fibonacci, con $241 = 15^2 + 15 + 1 = L(15)$ e con $c = 233 - 240 = -7 = -c$. Ed anche $241 - 233 = 8$ e $248 - 240 = 8$, con 8 numero di Fibonacci).

Rimane ancora da capire cosa siano gli elementi **naturali**, di numero n , che si combinano a due a due per formare i **numeri triangolari** T , e quindi poi anche $2T$, su cui si basa tutto il presente lavoro sul principio geometrico delle teorie

di stringa, da noi denominato **pgts** e identificato con la figura **geometrica** del **triangolo**, seppure parzialmente e provvisoriamente (l'altro elemento geometrico è la parabola $n^2 + n + 1$ accennata all'inizio, caso particolare del polinomio $an^2 + bn + c$, con $a = b = c = 1$).

Pertanto, possiamo ritenere, con le nostre considerazioni matematiche esposte in questo lavoro, che il problema del **pgts** sia ormai in parte risolto, o almeno già avviato a soluzione con ulteriori studi in merito, nostri o altrui..

Nota 1 Relazione tra quattro numeri successivi di Fibonacci e triangoli.

Circa i triangoli di Fibonacci, esiste una connessione con i quadrati di Fibonacci (vedi Generalizzazione della serie di Fibonacci già sul nostro sito Eratostene).

Se infatti si considera la generalizzazione per la coppia numerica 2;2 (insomma dei doppi dei numeri di Fibonacci), l'ipotenusa c non è più un numero di Fibonacci, ma il suo quadruplo: per esempio, con la serie normale di Fibonacci 1;1 abbiamo, per la quaterna **3, 5, 8, 13**:

$$a = 3*13 = 39$$

$$b = 2(5*8) = 2*40 = 80$$

$$c = \sqrt{(39^2 + 80^2)} = \sqrt{7921} = 89 = 1*89 \text{ con } 1 = 1^2, \text{ e } 89 \text{ numero di Fibonacci}$$

per la serie dei doppi di Fibonacci, 2;2, abbiamo, invece

6, 10, 16, 26

$$a = 6 * 26 = 156$$

$$b = 2(10 * 16) = 2 * 160 = 320$$

$$c = \sqrt{(156^2 + 320^2)} = \sqrt{(24336 + 102400)} = \sqrt{126736} = 356 = 4 * 89 \text{ con } 4 = 2^2 \text{ ed } 89 \text{ numero di Fibonacci.}$$

Per i tripli di Fibonacci (3;3), avremo, per la stessa quaterna: **9, 15, 24, 39**

$$a = 9 * 39 = 351$$

$$b = 2(15 * 24) = 2 * 360 = 720$$

$$c = \sqrt{(351^2 + 720^2)} = \sqrt{(123201 + 518400)} = \sqrt{641601} =$$

$$801 = 9 * 89, \text{ con } 9 = 3^2 \text{ ed } 89 \text{ numero di Fibonacci}$$

per i quadrupli, 4F, e quindi 4;4, avremo invece $c = 16 * 89 = 1424$, con $16 = 4^2$ ed 89 numero di Fibonacci; insomma lo stesso fenomeno che si verifica per i quadrati nella serie generalizzata, e con ora **terne** di Fibonacci, ma con differenza $Q - N = \pm n^2$, con Q quadrato dell'elemento centrale e N prodotto dei due numeri esterni ($n^2 = 1^2 = \pm 1$)

per la serie nota di Fibonacci, basata sulla coppia iniziale 1;1, dalla quale $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$, ecc.

Nota 2 Connessioni con le vibrazioni di superstringhe e con il modello Palumbo-Nardelli

Notiamo che il numero 8, e quindi tutti i multipli di esso, sono connessi con i “modi” che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una superstringa attraverso la seguente funzione di Ramanujan:

$$8 = \frac{1}{3} \frac{4 \left[\text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log \left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]}. \quad (1)$$

Inoltre, riguardo al numero 24, anch'esso multiplo di 8, esso è connesso alle vibrazioni fisiche delle stringhe bosoniche attraverso la seguente funzione di Ramanujan:

$$24 = \frac{4 \left[\text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log \left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]}. \quad (2)$$

Palumbo (2001) ha proposto un semplice modello della nascita ed evoluzione dell'Universo. Nardelli (2005) ha

confrontato questo modello con la teoria delle stringhe, e tradotto esso nei termini di quest'ultima ottenendo:

$$\begin{aligned}
& -\int d^{26}x \sqrt{g} \left[-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}) f(\phi) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] = \\
& = \int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \text{Tr}_\nu (|F_2|^2) \right], \quad (3)
\end{aligned}$$

una relazione generale che lega le stringhe bosoniche e fermioniche che agiscono in tutti i sistemi naturali.

È risaputo che le serie dei numeri di Fibonacci esibisce un carattere “frattale”, dove le forme ripetono la loro similarità partendo dal fattore di riduzione $1/\phi = 0,618033 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (Peitgen et al. 1986). Un tale fattore compare anche nella famosa identità frattale di Ramanujan (Hardy 1927):

$$0,618033 = 1/\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})} \frac{dt}{t^{4/5}}\right)}, \quad (4)$$

$$\text{e} \quad \pi = 2\Phi - \frac{3}{20} \left[R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})} \frac{dt}{t^{4/5}}\right)} \right], \quad (5)$$

dove

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Ricordiamo, inoltre, che π deriva anche dalle seguenti identità:

$$\pi = \frac{12}{\sqrt{130}} \log \left[\frac{(2+\sqrt{5})(3+\sqrt{13})}{\sqrt{2}} \right], \quad (5a)$$

$$e \quad \pi = \frac{24}{\sqrt{142}} \log \left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]. \quad (5b)$$

L'introduzione di (4) e (5) nella (3) fornisce:

$$\begin{aligned} & - \int d^{26}x \sqrt{g} \left[-\frac{R}{16G} \cdot \frac{1}{2\Phi - \frac{3}{20} \left(R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})} \frac{dt}{t^{4/5}}\right)} \right)} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}) f(\phi) + \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] = \int_0^\infty \frac{R}{\kappa_{11}^2} \cdot 2\Phi - \frac{3}{20} \left[R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})} \frac{dt}{t^{4/5}}\right)} \right] \cdot \\ & \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{11}^2}{2\Phi - \frac{3}{20} \left(R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})} \frac{dt}{t^{4/5}}\right)} \right)} \text{Tr}_v \right. \\ & \left. (F_2|^2) \right], \quad (6) \end{aligned}$$

che è la traduzione della (3) nei termini della Teoria dei Numeri, specificamente la possibile connessione tra l'identità di Ramanujan e la relazione inerente il modello Palumbo-Nardelli

Qui di seguito alcune pagine tratte dal libro di M. Livio “L’equazione impossibile”, un formulario inerente le formule dei poliedri regolari ed infine, diagramma che mostra la quasi sovrapposizione delle due parabole inerenti i numeri di Lie e quelli di Fibonacci.

come icosaedro (figura 61). Platone considerava questa figura come uno dei costituenti base del cosmo (gli altri sono il tetragono, il cubo, l'ottaedro e il dodecaedro. Tutti insieme prendono il nome di *solidi platonici*). L'icosaedro ha dodici vertici, venti facce (ognuna un triangolo equilatero) e trenta spigoli (le linee dove due facce si incontrano). Klein dimostrò in primo luogo che ci sono esattamente sessanta rotazioni con le quali il solido rimane invariato. In particolare (figura 61), quattro rotazioni di multipli di angoli di 72 gradi intorno ai segmenti che congiungono vertici opposti (per un totale di ventiquattro), due di 120 gradi intorno ai segmenti che uniscono i centri di facce opposte (per un totale di venti), le semirotaioni intorno ai segmenti che collegano i punti di mezzo di spigoli opposti (per un totale di quindici) e l'identità, che lascia invariato il solido. Felix mostrò poi che queste rotazioni formano un gruppo.

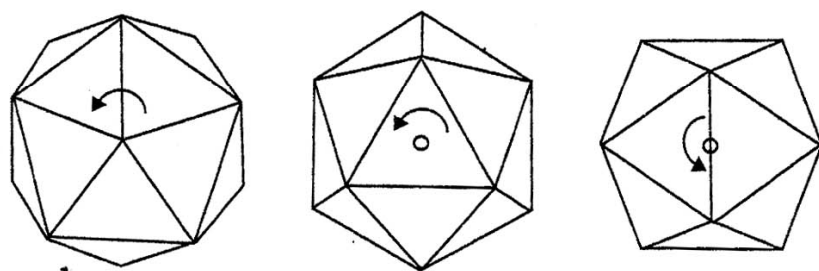


Figura 61

Successivamente esaminò un insieme particolare delle permutazioni delle cinque soluzioni putative di un'equazione di quinto grado. Più nello specifico, egli analizzò solo le permutazioni pari (quelle che contengono un numero pari di trasposizioni). Poiché c'è un totale di $5! = 120$ trasformazioni dei cinque elementi, le permutazioni pari sono esattamente sessanta (le altre sessanta sono dispari). E qui Felix fece scacco matto. Klein provò infatti che *il gruppo dell'icosaedro e quello delle permutazioni sono isomorfi*. Ma ricordiamoci che la dimostrazione di Galois sulla risolubilità delle espressioni algebriche di quinto grado teneva interamente conto della classificazione in base alle loro proprietà di simmetria in seguito alle permutazioni delle soluzioni. L'ina-

spettato collegamento tra le permutazioni e le rotazioni permise al matematico tedesco di tessere un magnifico arazzo in cui le equazioni di quinto grado, le funzioni e il gruppo delle rotazioni erano tutti strettamente intrecciati. Come il completamento di un puzzle rivela l'immagine completa, così le interconnessioni fondamentali scoperte da Klein fornirono la risposta definitiva al perché le espressioni algebriche di quinto grado possono essere risolte con le funzioni ellittiche.

Il potere unificatore della teoria dei gruppi era enorme e già alla fine del XIX secolo stava diventando chiaro che i suoi effetti avrebbero superato i confini della matematica pura. I fisici in particolare iniziarono a prenderla seriamente in considerazione. In primo luogo, grazie alla teoria della relatività generale di Einstein, la geometria fu riconosciuta come la proprietà chiave dell'universo in generale. La simmetria venne poi considerata la base da cui derivano in sostanza tutte le leggi della natura. Queste due semplici verità garantirono virtualmente che la ricerca di una teoria onnicomprensiva del cosmo si sarebbe trasformata in larga misura in quella dei gruppi sottostanti.

3.2.9 Poliedri regolari

Un poliedro si dice regolare se le facce sono poligoni regolari uguali e gli angoli sono uguali.

Esistono solo cinque poliedri regolari:

- il **tetraedro** (ha per facce quattro triangoli equilateri);
- l'**esaedro** o cubo (ha per facce sei quadrati);
- l'**ottaedro** (ha per facce otto triangoli equilateri);
- il **dodecaedro** (ha per facce dodici pentagoni regolari);
- l'**icosaedro** (ha per facce venti triangoli equilateri).

Poliedro regolare	Facce	Lati di ogni faccia	Vertici	Spigoli
Tetraedro	4	3	4	6
Esaedro	6	4	8	12
Ottaedro	8	3	6	12
Dodecaedro	12	5	20	30
Icosaedro	20	3	12	30

Per i poliedri regolari vale la **relazione di Eulero**:

$$F + V = S + 2$$

F = numero delle facce;

V = numero dei vertici;

S = numero degli spigoli.

Indicando con a la misura dello spigolo, è possibile esprimere la superficie, il volume, il raggio R della sfera circoscritta e il raggio r della sfera inscritta di un qualsiasi poliedro regolare in funzione di a .

Poliedro regolare	Superficie	Volume	R	r
Tetraedro	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$
Esaedro	$6a^2$	a^3	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{a}{2}$
Ottaedro	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$
Dodecaedro	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$
Icosaedro	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})a$

Tabella numeri di Lie

e di Fibonacci

n	n^2	n	1	=	L(n)	n^2	n	+ c	=	F(n)
0	0	0	1	=	1	0	0	1	=	1
1	1	1	1	=	3	1	1	1	=	3
2	4	2	1	=	7	4	2	2	=	8
3	9	3	1	=	13	9	3	1	=	13
4	16	4	1	=	21	9	3	1	=	21
5	25	5	1	=	31	25	5	4	=	34
...	=	=	...
7	49	7	1	=	57	49	7	-2	=	55

QUASI SOVRAPPOSIZIONE
INIZIALE DELLE DUE PARABOLE

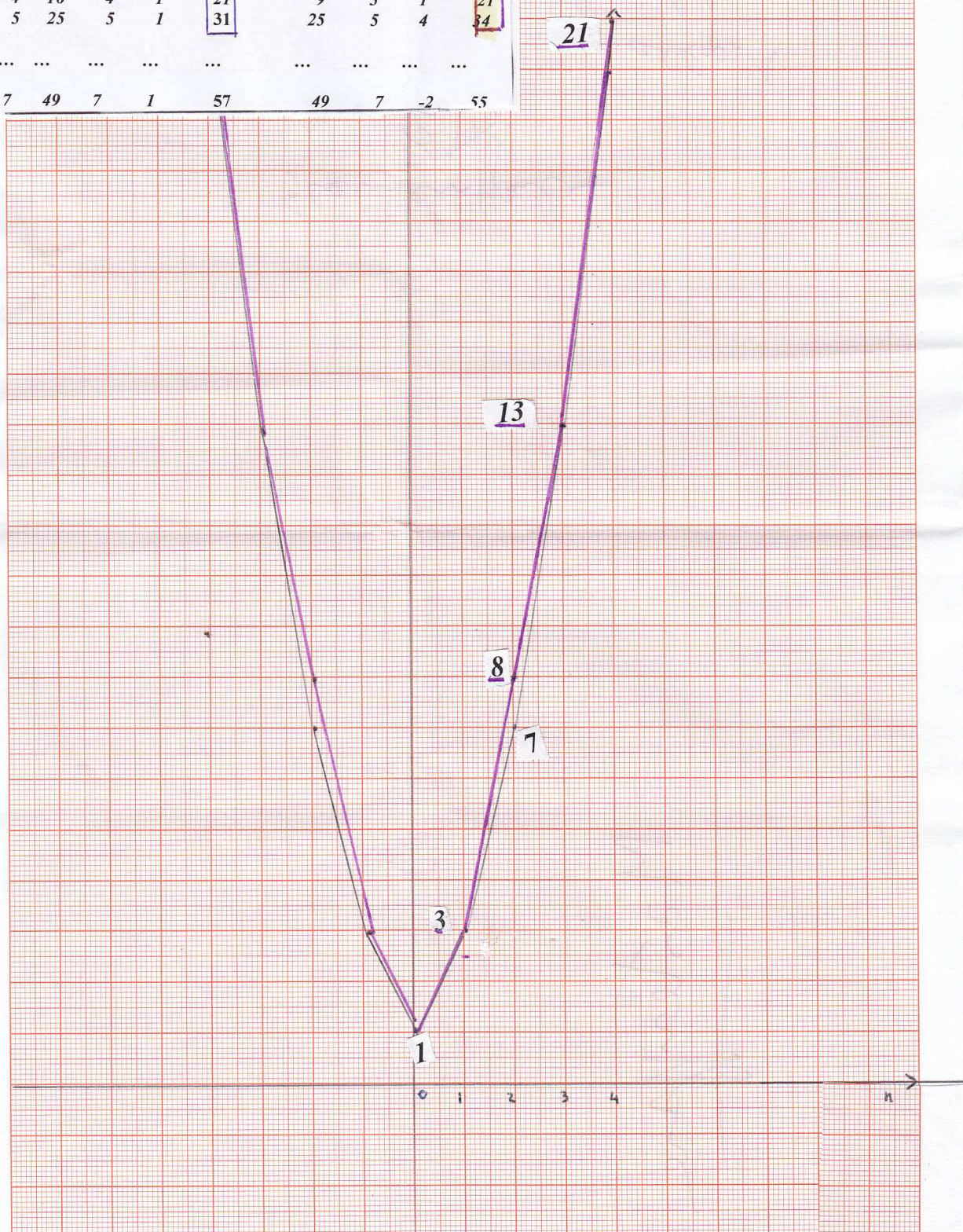


TABELLE FINALI

e riepilogative delle relazioni tra i numeri di Fibonacci F e i numeri Triangolari T , e $2T$

TABELLA $T \pm 1$, $T \pm 2$ e i numeri di Fibonacci F

T-2	T-1	T	T+1	T+2
-1	0	1	2	3
1	2	3	4	5
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
13	14	15	16	17
19	20	21	22	23
26	27	28	29	30
34	35	36	37	38
	44	45	46	
53	54	55	56	57
63	65	66	67	68
76	77	78	79	80
89	90	91	92	93
...
229	230	231	233	234
...
376	377	378	379	380
...
1594	1595	1596	1597	1598
...

1 = anche
numero di Fibonacci
 3 = anche
numero di Fibonacci

21 = anche
numero di Fibonacci

55 = anche
numero di Fibonacci

Come si nota facilmente, fino a $T = 91$, tutti i numeri di Fibonacci fino a 89 si trovano nella striscia numerica da $T-2$ a $T+2$, ma anche alcuni numeri di Fibonacci più grandi, come 377 e 1597, giacciono in questa stessa striscia numerica.

Tale vicinanza di F a T non è del tutto casuale, per quanto diremo in seguito. Ma i numeri di Fibonacci giacciono anche nella striscia numerica da $2T-2$ a $T+2$, come da simile tabella seguente:

$$\frac{2T-2 \quad 2T-1 \quad \mathbf{2T} \quad \mathbf{2T+1} \quad 2T+2 \quad \mathbf{2T+1} = \text{anche numeri di}}{\text{Lie } L(n) = n^2 + n + 1 = 2T + 1}$$

0	1	2	3	4	3 = anche numero di Lie, $L(1)$
---	---	----------	----------	---	----------------------------------------

4	5	6	7	8	$\mathbf{7*2 = 14 = G2}$; $\mathbf{7*19 = 133 = 11^2 + 1 + 1 = E7}$
---	---	----------	----------	---	----------------------------------------------------------------------

10	11	12	13	14	$\mathbf{13}$ = anche numero di Lie, $L(3)$, $\mathbf{13*4 = 52 = F4}$, $\mathbf{13*6 = 78 = E6}$
----	----	-----------	-----------	----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------

18	19	20	21	22	$\mathbf{21}$ = anche numero di Lie, $L(4)$
----	----	-----------	-----------	----	---------------------------------------------

28	29	30	31	32	$\mathbf{31*8 = 248 = E8}$
----	----	-----------	-----------	----	----------------------------

40	41	42	43	44
----	----	-----------	-----------	----

54	55	56	57	58
----	-----------	-----------	-----------	----

70	71	72	73	74
----	----	-----------	-----------	----

88	89	90	91	92
----	-----------	-----------	-----------	----

...
-----	-----	-----	-----	-----

130	131	132	133	134
-----	-----	------------	------------	-----

$$\mathbf{133*1 = 7*19 = E7}$$

Gruppo di Lie esso stesso

(I numeri di Lie, ricordiamo, sono i numeri di forma $n^2 + n + 1$, connessi ai cinque gruppi eccezionali di Lie, i cui numeri di dimensione sono segnati in verde, e sono piccoli multipli dei numeri di Lie 7, 13 e 31; ecco quindi brevemente riassunte le connessioni tra numeri triangolari T , $2T$, $2T+1$ = numeri di Lie e gruppi di Lie, e anche con i numeri di Fibonacci fino a 89 giacenti nella striscia numerica tra $2T - 2$ e $2T+2$).

Manca il **144** perché è un quadrato perfetto = 12^2 (unico, insieme a 1, in tutta la serie di Fibonacci, ma abbiamo anche 144 di forma $4T = 4 \cdot 36$), mentre tutti gli altri numeri di Fibonacci sono vicini a metà distanza tra un quadrato e l'altro, come i numeri di Lie $n^2 + n + 1$; come si vede dalle due tabelle, molti numeri iniziali di Fibonacci (fino a 89, e qualcuno anche dopo) sono di forma aritmetica T (cioè triangolari e di Fibonacci insieme, come **1, 3, 21 e 55**), oppure di forma $T \pm 1$, come **0, 2, 5, 377 e 1597**), oppure $T \pm 2$, come **1, 5, 8, 34 e 89**, ma anche $2T \pm 1$, come **1, 5, 13, 21, 55 e 89**, e infine di forma $2T \pm 2$, come **0 e 8**; alcuni sono di più forme insieme, come per esempio **5, 8, 21**.

Alcuni sono anche numeri di Lie, come **3, 13 e 21**.

Queste tabelle dimostrano come anche i numeri di Fibonacci possano rispettare le simmetrie dei numeri T (coefficienti binomiali) e quindi dei vicinissimi numeri di Lie $L(n) = 2T+1 = n^2 + n + 1$) presenti nel Modello Standard e nelle teorie di stringa nel microcosmo, ed è per questo che essi sono presenti, almeno fino a $F = 144$, in parecchi fenomeni naturali, formando spirali, frattali, ecc. nel macrocosmo visibile.

Ora il perché i numeri di Fibonacci appaiono così spesso e misteriosamente in natura è molto più chiaro: sono connessi alle simmetrie alla base delle geometrie spaziali; finora si constataba soltanto tale loro curiosa presenza in natura, attribuendola in genere alle loro già note e numerose proprietà aritmetiche, per esempio la somma di due numeri di Fibonacci consecutivi dà il prossimo numero di Fibonacci; invece tale presenza sarebbe da attribuire, più correttamente, alle loro proprietà geometriche,

identiche o molto vicine a quelle dei numeri di Lie e ai conseguenti cinque gruppi eccezionali di Lie. E quindi anche i numeri di Fibonacci, in tal modo, possono benissimo far parte del PGTS e contribuire in futuro allo studio delle teorie di stringa, oltre che a spiegare finalmente la loro comparsa in parecchi fenomeni naturali.

NUOVA TABELLA $T, L(n), F$
(numeri triangolari, di Lie, di Fibonacci)

n	T	$L(n)$	F	
0	1	1	1	
1	3	3	3	
2	6	<u>7</u>	8	<u>7</u> *2 =14 = gruppo di Lie
3	10	13	13	
3	15	<u>13</u>	13	<u>13</u> *4 =52 =gruppo di Lie, <u>13</u> *6 =78 = gruppo di Lie
4	21	21	21	
5	28	31	34	
7	55	57	55	
8	<u>78</u>	73	---	<u>78</u> = gruppo di Lie
9	91	91	89	
---	---	---	---	
11	136	<u>133</u>	144	<u>133</u> = <u>7</u> *19 = gruppo di Lie
---	---	---	---	

15	231	<u>241</u>	233	<u>241</u> + 7 = 248 = gruppo di Lie
---	---	---	---	
19	378	381	377	
---	---	---	---	
24	595	601	610	
---	---	---		

Come si vede, numeri triangolari T, numeri di Lie L(n) e numeri di Fibonacci F sono molto vicini (differenze molto piccole tra T, L(n) ed F) per molti n tali che $L(n) = n^2 + n + 1$ con n primo o potenza di primo tranne che per n = 15, n = 24 (n = primo non vale per alcuni numeri di Fibonacci)

**NUOVA TABELLA per numeri primi naturali,
vibrazioni di stringa e numeri esagonali normali e
centrati (6T+1)**

n.primi naturali, di Lie e Fibonacci	n.esagonali normali	n.esagon. centrati	freq.vibr. stringhe
6F _± 1 2T+1		6T+1	
-1 1 3	1	1	2 , 3
1, 2, 3			
5 7 7	6	7	7
11 13 13	15		11 , 13
17 19		19	19
29 31 31	28	37	31 , 37
47	45		
79			83
127	120	127	131 , 139
229, 233	231		231 , 233

Come si vede, le frequenze di vibrazioni di stringa (v.s.) sono un misto di numeri primi naturali (7,11,13,19 e 31), di numeri esagonali normali (231) e di numeri esagonali centrati (7, 19 e 37), ma anche con i numeri di Lie 3, 7, 13 e 31 e i numeri di Fibonacci 2, 3, 13, 233.

Una nuova possibile connessione, quindi, tra le **frequenze di vibrazione delle stringhe** e tutti i tipi di numeri sopra considerati, soprattutto con i **numeri triangolari T**, **esagonali normali**, alcuni dei quali sono anche numeri triangolari T (come 1, 6, 28, 45 e 231), **esagonali centrati** ($6T+1$), **numeri di Lie**, $L(n)$ di forma $2T+1$, e i **numeri di Fibonacci**, sia direttamente, sia tramite i **numeri primi naturali**, di forma $6F+1$ (prima colonna, già visti in precedenti lavori). Un intreccio, quindi, non del tutto dovuto al caso, come del resto anche il fatto che tutti i numeri di Lie (tranne il 3 iniziale), tutti i numeri esagonali centrati ($6T+1$) e quattro (7, 13, 19 e 31) su cinque numeri primi naturali connessi alle vibrazioni di stringa, sono di forma $6k+1$, e tra gli stessi numeri v.s. anche 7, 13, 19, 31 e 37 sono di forma $6k+1$ (i quattro numeri primi naturali di cui sopra e il 37). Il caso, quindi, sembra essere escluso dalle suddette connessioni. Anche le frequenze di vibrazioni delle stringhe, insomma, sembrano connesse ai numeri triangolari T, come i numeri di Lie di forma $2T+1$ (che sono alla base dei gruppi di Lie) e gli stessi numeri di Fibonacci, di forma $2T+c$ con c numero molto piccolo (1, 2, 3) fino a $F = 89$ ($2 = 1+1$, $5 = 3+2$, $8 = 7+1$, $34 = 31+3$, $55 = 57-2$, $89 = 91-2$, con 1,7,31,57 e 91 numeri di Lie, mentre 13 e 21 con i numeri di Lie 13 e 21, e quindi in questi due casi $c = 0$). Tutto ciò potrebbe essere molto

importante per il **pgts**, il principio geometrico alla base delle **teorie di stringa**, e quindi, alla lontana, anche di una possibile **TOE**, o **Teoria del Tutto**.

Conclusioni

Uno dei pregi di questo lavoro è l'aver individuato, nei numeri di Fibonacci, lo stesso DNA aritmetico dei Gruppi di Lie, e cioè $2T$, con T i numeri Triangolari (coefficienti binomiali delle combinazioni delle rotazioni simmetriche di un triangolo equilatero, ecc.), e quindi che la Natura si regge da una parte sulle simmetrie (modello standard e stringhe nel microcosmo) e da un'altra parte (macrocosmo visibile) sui numeri di Fibonacci, e sulle sue proprietà geometriche (e sui numeri triangolari di Lie), attraverso innumerevoli fenomeni in cui appaiono tali numeri; ecco anche il motivo per cui $1,618...$ appare in numerose formule di fisica, specie quelle sulle stringhe. Simmetria (triangoli perfetti tramite le geometrie proiettive) e serie di Fibonacci, quindi, sono parenti strettissimi sia dal punto di vista numerico (numeri triangolari T e relative combinazioni) che geometrico (triangoli quasi perfetti)

Questa è l'essenza del Principio Geometrico che è alla base delle Teorie di Stringa.

Riferimenti

1.) Ing. Rosario Turco, “ Congettura di Yang e Mills o del gap di massa”sezione “Articoli sui Problemi del Millennio”

sul nostro sito www.gruppoeratostene.com

2.) “I problemi del Millennio” su Wikipedia

3.) Ing. Rosario Turco,”Congettura di Birch e Swinnerton-Dyer”, in sezione “Articoli sui Problemi del Millennio”

4.) “Fibonacci, dimensioni, stringhe: nuove interessanti connessioni”

5.) La serie di Fibonacci e le serie numeriche naturali (snn) – Come la Natura evita i quadrati” sul nostro sito

www.gruppoeratostene.com , sul sito del Dott. Nardelli (vedi sezione Link) e sul data base Solar del CNR.

6.) Jan Stewart, “L’eleganza della verità – Storia della simmetria” , Einaudi

7.) “Generalizzazione della serie di Fibonacci e il paradossi dei relativi quadrati” sul sito www.gruppoeratostene.com

sezione “Articoli su Fibonacci”